

Дмитриева Т. Л., Ботхоев А. Е., Фролов Д. О.
T. L. Dmitrieva, A. E. Botkhoev, D. O. Frolov

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИНСТРУМЕНТАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ MATHCAD

SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS OF ROD STRUCTURES USING THE TOOLS OF THE MATHCAD COMPUTING SYSTEM

Дмитриева Татьяна Львовна – доктор технических наук, зав. кафедрой механики и сопротивления материалов Иркутского национального исследовательского технического университета (Россия, Иркутск); тел. 8(964)272-78-23. E-mail: dmitrievat@list.ru.

Tatiana L. Dmitrieva – Doctor of Technical Sciences, Head of Mechanic and Strength of Materials Department, Irkutsk National Research Technical University (Russia, Irkutsk); tel. 8(964)272-78-23. E-mail: dmitrievat@list.ru.

Ботхоев Александр Евгеньевич – аспирант Иркутского национального исследовательского технического университета (Россия, Иркутск). E-mail: botkhoev@ya.ru.

Alexander E. Botkhoev – Postgraduate Student, Irkutsk National Research Technical University (Russia, Irkutsk). E-mail: botkhoev@ya.ru.

Фролов Дмитрий Олегович – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: optcompanys@mail.ru.

Dmitriy O. Frolov – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: optcompanys@mail.ru.

Аннотация. Представлен алгоритм оптимизации стальной рамы при действии статической нагрузки, где принята постановка в форме задачи нелинейного программирования. Решение выполнено с использованием инструментов математического пакета Mathcad, что делает алгоритм достаточно прозрачным и позволяет отследить последовательность вычислительных операций. Подбираются параметры сечений элементов рамы, где стойки имеют кольцевое, а ригель двутавровое сечение на заданном интервале (всего 4 параметра). Целевая функция представляет объём рамы. Применён широкий спектр нормативных проверок по прочности и жёсткости. Для решения использован алгоритм модифицированных функций Лагранжа, который продемонстрировал достаточно быструю сходимость алгоритма к оптимальному проекту с высокой точностью в невязках ограничений. Выполнена проверка решения на принадлежность глобальному оптимуму.

Summary. An algorithm for optimizing a steel frame under static load is presented, where the statement is taken as a nonlinear programming problem. The solution is implemented using the tools of the MathCAD mathematical package, which makes the algorithm sufficiently transparent and allows tracking the sequence of computational operations. The parameters of the frame element sections are selected, where the posts have a ring section and the crossbar has an I-beam section at a given interval (4 parameters in total). The objective function represents the frame volume. A wide range of standard strength and rigidity checks is applied. The modified Lagrange function algorithm is used for the solution, which demonstrated a sufficiently fast convergence of the algorithm to the optimal design with high accuracy in constraint residuals. The solution is checked for belonging to the global optimum.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, нелинейное программирование, пакет Mathcad.

Key words: optimal design, nonlinear programming, Mathcad package.

УДК 51-74

Актуальность исследования. В настоящее время большинство инженерных задач, связанных с расчётом и оптимизацией конструкций зданий и сооружений, выполняются автоматизировано. Расчётные комплексы (ПК) инженерного анализа стали общедоступны, а их производительность существенно выросла. За последние 5 лет на рынок программных продуктов в рамках им-

портзамещения стало активно продвигаться множество вычислительных комплексов, таких как CAE Fidesys, ЛОГОС ПРОЧНОСТЬ, FlowVision и др. [1]. Однако как альтернатива расчётов в универсальных ПК некоторые расчётные алгоритмы могут быть реализованы специалистами с использованием различных программных сред самостоятельно [2–4]. Это в полной мере касается задач оптимального проектирования, поскольку модули оптимизации заявлены во многих ПК, однако достоверность полученных результатов нуждается в проверке [5–7]. Одним из инструментов, позволяющих выполнять реализацию авторских алгоритмов, является функционал математического пакета Mathcad. Программные алгоритмы, формализованные в среде Mathcad, могут быть использованы в проектировании, при решении научных задач, в учебном процессе, а также для верификации аналогичных задач в сертифицированных программных комплексах.

Алгоритм исследования. Алгоритм решения задачи оптимального проектирования приведём на примере рамы, изображённой на рис. 1.

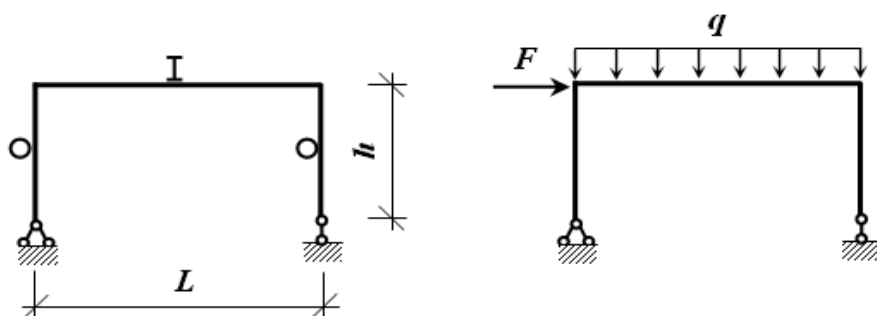


Рис. 1. Геометрия и нагружение плоской стальной рамы

Приняты следующие исходные данные:

- расчётное сопротивление стали по пределу текучести $R_y = 2,25 \cdot 10^5$ кПа;
- расчётное сопротивление стали сдвигу $R_s = 1,25 \cdot 10^5$ кПа;
- модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^8$ кПа;
- геометрия рамы $L = 8$ м, $h = 4$ м;
- нагружение $F = 70$ кН, $q = 80$ кН/м.

Параметры сечений стойки и ригеля показаны на рис. 2 и 3 и в табл. 1.

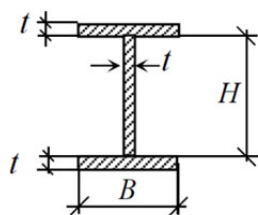


Рис. 2. Сечение ригеля

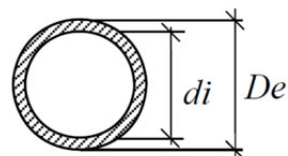


Рис. 3. Сечение стойки

Таблица 1

Варьируемые параметры

Номер параметра	Обозначение	Описание
X_1	H	Высота стенки
X_2	B	Ширина полки
X_3	t	Толщина стенки
X_4	De	Внешний диаметр кольца

Целевая функция $f(x)$ представляет собой объём рамы: $f(x) = A_{rig} \cdot L + 2 \cdot A_{st} \cdot h$.
Все проверки приведены в табл. 2.

Таблица 2

Перечень проверок

Выражение проверки	Описание
$g_1 = \frac{H}{3,5 \cdot t} \sqrt{\frac{R_y}{E}} - 1 \leq 0$	Условие, обеспечивающее местную устойчивость стенки двутавра
$g_2 = \frac{M_{st}}{W_{st,min} \cdot R_y} + \frac{N_{st}}{A_{st} \cdot R_y} - 1 \leq 0$	Проверка на прочность стойки по нормальным напряжениям
$g_3 = \frac{M_{rig}}{W_c \cdot R_y} - 1 \leq 0$	Проверка на прочность ригеля по нормальным напряжениям
$g_4 = \frac{Q_{rig} \cdot S_{rig}}{J_{rig} \cdot t \cdot R_s} - 1 \leq 0$	Проверка на прочность ригеля по касательным напряжениям
$g_5 = \frac{\Delta_{rig}}{[\Delta_{rig}]} - 1 \leq 0$	Проверка на вертикальное отклонение сечения <i>l</i> ригеля
$g_6 = \frac{\Delta_{st}}{[\Delta_{st}]} - 1 \leq 0$	Проверка на горизонтальное отклонение сечения <i>l</i> ригеля

Алгоритм решения задачи оптимизации рамы. На рис. 4 показана укрупнённая блок-схема алгоритма оптимизации рамы.

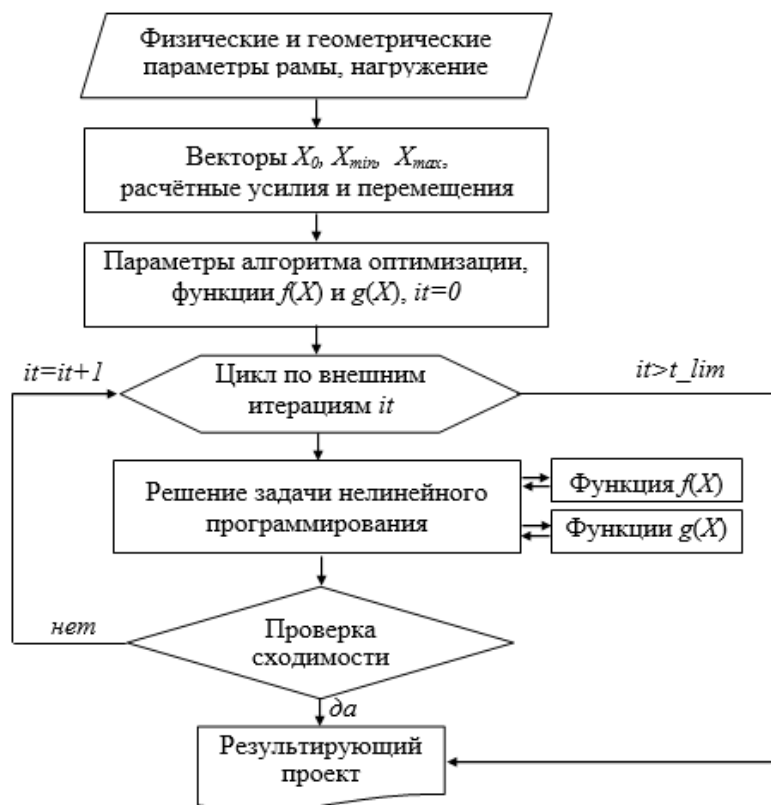


Рис. 4. Блок-схема алгоритма оптимального проектирования рамы

Решение задачи выполняется с использованием метода модифицированных функций Лагранжа [8; 9]. Итерационный алгоритм поиска параметров варьирования включает две основные операции: поиск параметров $\{X\}$ путём минимизации функции Fp и пересчёт двойственных переменных $\{Y\}$. На рис. 5 приведена блок-схема последовательности вычислительных операций внутри итераций поискового алгоритма оптимизации.

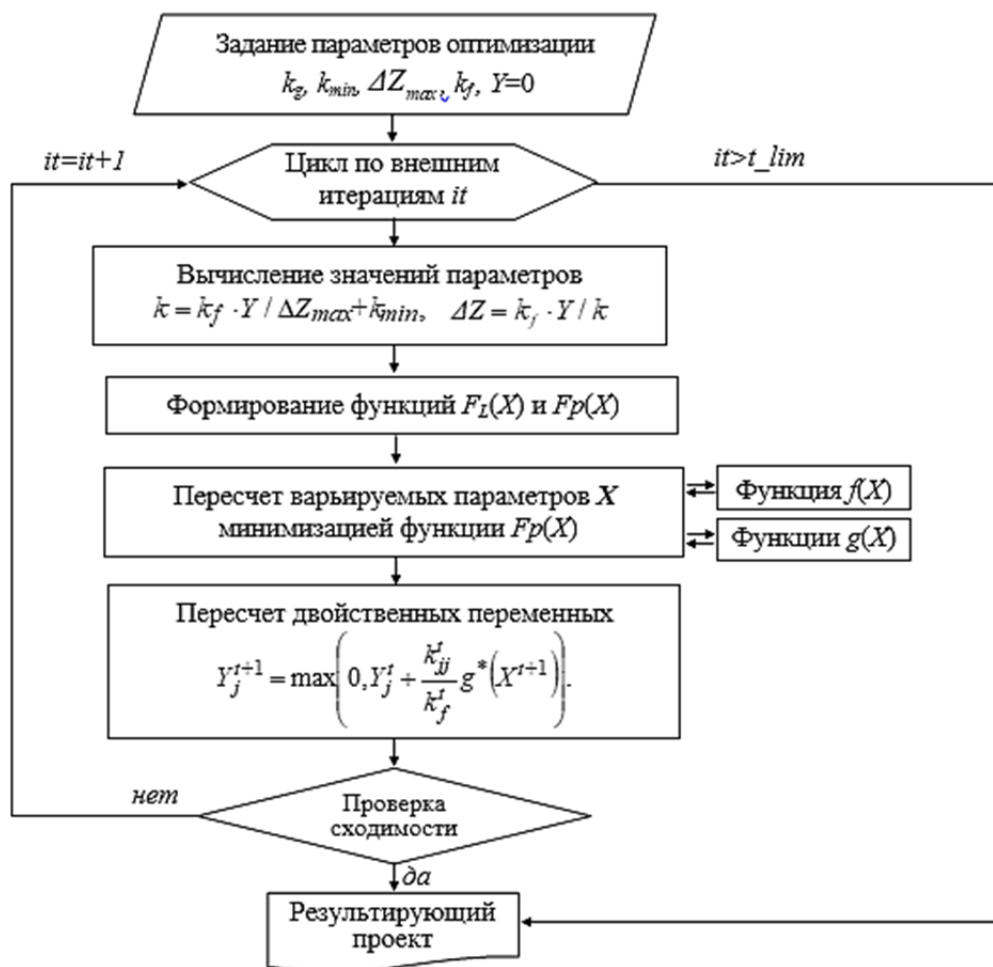


Рис. 5. Блок-схема последовательности вычислительных операций на итерациях

Решение данной задачи в среде Mathcad имеет некоторые особенности:

1. Минимизация функции $Fp(X)$ выполняется методами, заложенными в этот пакет.
2. Автоматический выход из итерационного цикла не представляется возможным и контролируется самим пользователем из условия равенства варьируемых параметров на двух соседних итерациях при условии, что выполнены все требования в функциях ограничений.
3. Вследствие того, что рама статически определима, после переопределения параметров сечений на внешних итерациях не требуется переопределения расчётных усилий в раме, которые вычисляются до входа в итерационный процесс и остаются постоянными на протяжении всего хода вычислений. Таким же образом определяются значения расчётных перемещений без учёта параметров жёсткости.
4. Все параметры варьирования входят в геометрические характеристики сечений, которые включены в функции ограничений (см. табл. 2).

Ниже на рис. 6-9 приведены листинги расчётов в математическом пакете Mathcad.

На рис. 6 показано задание исходных данных и начальных значений варьируемых параметров, формирование функций геометрических характеристик, вычисление расчётных усилий и параметров перемещений в среде Mathcad.

ORIGIN := 1

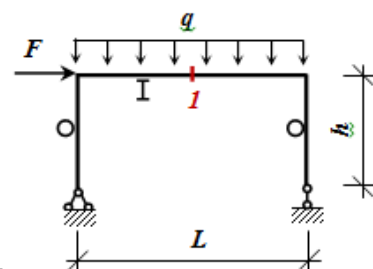
Оптимизация рамы при действии силы и распределенной нагрузки

Исходные данные

$$L := 8 \quad h := 4 \quad kt := 28$$

$$E := 2.06 \cdot 10^8 \quad R_y := 2.25 \cdot 10^5 \quad R_s := 1.25 \cdot 10^5$$

$$q := 80 \quad P := 70 \quad V_lim1 := 0.016 \quad U_lim1 := 0.04$$



Начальные значения и пределы изменения параметров (м)

$$X_{min} := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \quad X := \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \quad X_{max} := \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 8 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2}$$

Геометрические характеристики сечений стоек и ригеля

$$A_st(X) := \begin{cases} t \leftarrow \frac{X_4}{kt} \\ di \leftarrow X_4 - 2 \cdot t \\ A_st \leftarrow \frac{\pi \cdot [(X_4)^2 - di^2]}{4} \end{cases}$$

$$A_rig(X) := [(X_1 + 2 \cdot X_2) X_3]$$

$$S_rig(X) := \frac{(X_2 - X_3) \cdot X_3}{2} \cdot \left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_3}{2} \right)$$

$$Geom_st(X) := \begin{cases} t \leftarrow \frac{X_4}{kt} \\ di \leftarrow X_4 - 2 \cdot t \\ J_st \leftarrow \frac{\pi [(X_4)^4 - di^4]}{64} \\ W_st \leftarrow \frac{2J_st}{X_4} \\ \begin{pmatrix} J_st \\ W_st \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Geom_rig(X) := \begin{cases} Jx_s \leftarrow X_3 \cdot \frac{(X_1)^3}{12} \\ A_p \leftarrow X_2 \cdot X_3 \\ Jx_p \leftarrow \left[\frac{(X_3)^3 \cdot X_2}{12} \right] \dots \\ \quad + A_p \cdot \left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_3}{2} \right)^2 \\ J_rig \leftarrow Jx_s + 2Jx_p \\ W_rig \leftarrow \frac{2J_rig}{X_1 + 2X_3} \\ \begin{pmatrix} J_rig \\ W_rig \end{pmatrix} \end{cases}$$

Расчетные значения усилий и перемещений

$$M_rig := \left(q \cdot \frac{L^2}{8} \right) + \left(\frac{P \cdot h}{2} \right) \quad Q_rig := \left(q \cdot \frac{L}{2} \right) + \left(P \cdot \frac{h}{L} \right)$$

$$M_st := P \cdot h \quad N_st := q \cdot \frac{L}{2} + P \cdot \frac{h}{L}$$

$$V_rig := \left(5 \cdot q \cdot \frac{L^4}{384} \right) + \left(\frac{P \cdot h \cdot L^2}{16} \right) \quad U_rig1 := \left(P \cdot \frac{h^2}{3} \cdot L \right) + \left(\frac{q \cdot L^3 \cdot h}{48} \right) \quad U_rig2 := \left(P \cdot \frac{h^2}{3} \cdot h \right)$$

Рис. 6. Листинг расчётов в среде Mathcad

Геометрические характеристики сечений

$$J_{st}(X) := \text{Geom_st}(X)_1 \quad W_{st}(X) := \text{Geom_st}(X)_2$$

$$J_{rig}(X) := \text{Geom_rig}(X)_1 \quad W_{rig}(X) := \text{Geom_rig}(X)_2$$

Целевая функция $f(X) := 2A_{st}(X) \cdot h + A_{rig}(X) \cdot L$

Ограничения по прочности и жесткости

$$g(X) := kg \left[\begin{array}{l} \left(\frac{X_1}{3.5 \cdot X_3} \right) \cdot \sqrt{\frac{Ry}{E}} - 1 \\ \left(\frac{N_{st}}{A_{st}(X)} + \frac{M_{st}}{W_{st}(X)} \right) \cdot \frac{1}{Ry} - 1 \\ \left(\frac{M_{rig}}{W_{rig}(X)} \right) \cdot \frac{1}{Ry} - 1 \\ \left(\frac{Q_{rig} \cdot S_{rig}(X)}{J_{rig}(X) X_3} \right) \cdot \frac{1}{Rs} - 1 \\ \left(\frac{V_{rig}}{J_{rig}(X) \cdot E} \right) \cdot \frac{1}{V_{lim1}} - 1 \\ \left[\frac{U_{rig1}}{E J_{rig}(X)} + \frac{U_{rig2}}{(E J_{st}(X))} \right] \cdot \frac{1}{U_{lim1}} - 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{ll} m := 6 & \text{Число ограничений} \\ kg := 10 & \text{Весовой коэффициент} \end{array}$$

$$g(X) = \begin{pmatrix} -9.6223 \\ 55.41058 \\ 17.13043 \\ -9.53696 \\ 75.26805 \\ 120.47219 \end{pmatrix}$$

Рис. 7. Формирование функций ограничений и целевой функции в среде Mathcad

Итерации алгоритма оптимизации

$$it := it + 1 = 2$$

$$k_{i,i} := kf \cdot \frac{y_i}{\Delta Z_{max}} + kmin \quad \Delta Z_i := \frac{kf \cdot y_i}{k_{i,i}} \quad \delta_{i,i} := \begin{cases} 1 & \text{if } g(X)_i + \Delta Z_i > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FL(X) := f(X) + y^T \cdot \delta \cdot g(X) \quad Fp(X) := kf \cdot FL(X) + 0.5 \cdot g(X)^T \cdot \delta \cdot k \cdot g(X)$$

$$\text{Given } Xmin \leq X \leq Xmax$$

$$X := \text{Minimize}(Fp, X) = \begin{pmatrix} 0.79645 \\ 0.07 \\ 0.01 \\ 0.26868 \end{pmatrix}$$

$$g(X) = \begin{pmatrix} -2.47944 \\ 17.49515 \\ 11.81712 \\ -9.47037 \\ 15.19511 \\ 29.5899 \end{pmatrix}$$

$$Fit := f(X) \quad Git := \max(g(X))$$

$$kk_{it} := \text{match}(\max(g(X)), g(X))_{1,1}$$

Вектор y $y_i := \max\left(0, y_i + \frac{k_{i,i} \cdot g(X)_i}{kf}\right)$

Рис. 8. Последовательность операций на итерации поискового процесса оптимизации в среде Mathcad

Результаты оптимизацииЧисло итераций $it = 11$ Объем рамы (м куб) $f(X) = 0.24517$ Параметры
элементов (м)

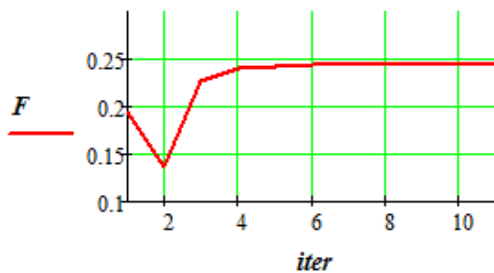
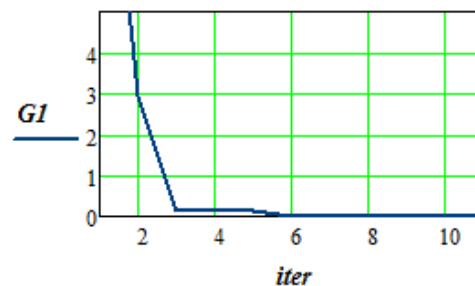
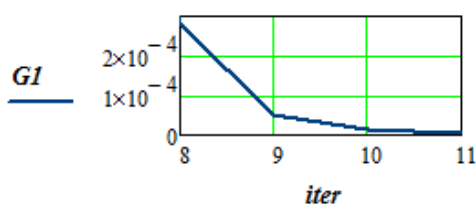
$$X = \begin{pmatrix} 1.059041039 \\ 0.154132255 \\ 0.01 \\ 0.396076274 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{rig} \\ B_{rig} \\ t_{rig} \\ de_{st} \end{matrix}$$

Параметры
элементов (см)

$$X \cdot 100 = \begin{pmatrix} 105.9041 \\ 15.41323 \\ 1 \\ 39.60763 \end{pmatrix}$$

Вектор ограничений

$$g1 := \frac{g(X)}{kg} = \begin{pmatrix} 5.51324 \times 10^{-6} \\ -0.11181 \\ -1.38569 \times 10^{-4} \\ -0.94152 \\ -0.12632 \\ 4.3966 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Изменения целевой функции
на итерацияхИзменения максимальных значений
ограничений на итерацияхИзменения максимальных значений
ограничений на последних итерациях

Конструктивное ограничение

$$g1_1 = 5.51324 \times 10^{-6}$$

Ограничения по нормальным
напряжениям в ригеле

$$g1_6 = 4.3966 \times 10^{-6}$$

Ограничения на горизонтальное
перемещение узла 1

$$g1_3 = -1.38569 \times 10^{-4}$$

Оптимальные значения параметров сечений с учетом округлений в см

Решение 1. Округление до целого числа в см

$$X_{opt1} := \text{ceil}(X \cdot 100) = \begin{pmatrix} 106 \\ 16 \\ 1 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$f(X_{opt1}) = 2.488865 \times 10^3$$

$$g_{opt1} := \frac{g\left(\frac{X_{opt1}}{100}\right)}{kg} = \begin{pmatrix} 9.11018 \times 10^{-4} \\ -0.1368 \\ -0.0191 \\ -0.94029 \\ -0.14365 \\ -0.03084 \end{pmatrix}$$

Решение 2. Округление до первого знака в см

$$X_{opt2} := \text{round}(X \cdot 100, 1) = \begin{pmatrix} 105.9 \\ 15.4 \\ 1 \\ 39.6 \end{pmatrix}$$

$$f(X_{opt2}) = 2.450907 \times 10^3$$

$$g_{opt2} := \frac{g\left(\frac{X_{opt2}}{100}\right)}{kg} = \begin{pmatrix} -3.32381 \times 10^{-5} \\ -0.11131 \\ 3.25218 \times 10^{-4} \\ -0.94154 \\ -0.12588 \\ 6.63475 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Рис. 9. Результаты расчёта с использованием алгоритма
оптимизации в среде Mathcad

Результаты исследования. Полученные результаты могут быть верифицированы прямым расчётом с использованием любого программного комплекса [9]. Помимо этого, необходимо выполнить проверку на достижение глобального оптимума. Эту проверку обычно производят заданием нескольких начальных проектов, что и было выполнено в данном исследовании. Отметим, что не при всех начальных параметрах в рассмотренной задаче была достигнута сходимость. Так, при задании значений, близких к верхнему пределу изменения этих параметров, алгоритм расходился и решение не было получено.

Приведём результаты решений при задании 4 начальных значений варьируемых параметров и покажем сходимость в изменении целевой функции на итерациях (см. рис. 10). Как видно из графиков, результаты всех четырёх расчётов практически совпадают уже на 4-й итерации. Далее наблюдаются небольшие колебания значений функции цели, повышающие точность в невязках ограничений.

Подобным же образом с использованием инструментов программы Mathcad могут быть формализованы и решены задачи, где реализованы алгоритмы оптимизации конструкций различного вида [10; 11].

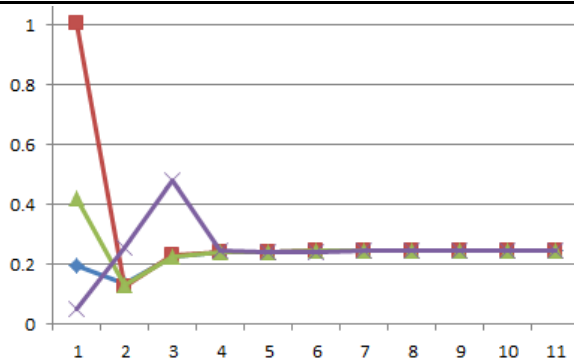


Рис. 10. Изменения целевой функции на итерациях при различных начальных проектах

ЛИТЕРАТУРА

1. Akimov, P. A. About The national software system for structural analysis / P. A. Akimov, A. M. Belostotsky, O. V. Kabantsev, V. N. Sidorov, A. R. Tusnin // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Vol. 18, № 1. – P. 151-155.
2. Методы топологической оптимизации в программном комплексе 3D PRINTER / Д. Ю. Дьянов, А. Н. Медведкина, А. Н. Быков, В. В. Попов // Математическое моделирование. – 2019. – Т. 31. – № 7. – С. 75-90.
3. Hill, C. Optimization with scipy.optimize. In: Python for Chemists. Cambridge: Cambridge University Press. 2023. – P. 247-259.
4. Alekseytsev, A. V. Optimization of bearing structures subject to mechanical safety: an evolutionary approach and software // A. V. Alekseytsev, Al Ali Mohamad // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – 18 (2). – P. 131-142.
5. Lalwani, S. A Survey on Parallel Particle Swarm Optimization Algorithms / S. Lalwani, H. Sharma, S. C. Satapathy, K. Deep, J. C. Bansal // Arabian Journal for Science and Engineering. – 2019. Vol. 44. – P. 1899-1923.
6. Alekseytsev, A. V. Optimization of hybrid I-beams using modified particle swarm method / A. V. Alekseytsev, Al Ali Mohamad // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – 83 (7). – P. 175-185.
7. Abdi, M. Topology optimization of geometrically nonlinear structures using an evolutionary optimization method / M. Abdi, I. Ashcroft, R. Wildman // Engineering Optimization. – 2018. – Vol. 50, № 11. – P. 1850-1870.
8. Дмитриева, Т. Л. Сравнительная оценка результатов оптимального проектирования ферм с использованием программных средств / Т. Л. Дмитриева, Ле Чан Минь Дат // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2014. – Vol. 12. – № 3. – С. 110-117.
9. Дмитриева, Т. Л. Верификация программных комплексов расчёта и оптимизации конструкций / Т. Л. Дмитриева // International Journal for Computation Civil and Structural Engineering. – 2011. – Vol. 7. – № 3. – P. 95-102.
10. Петров, М. Р. Исследование характеристик гиперэластичного материала в случае расчёта конструкций, состоящих из тонких стержней / М. Р. Петров, А. Н. Петрова, В. М. Петров // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2016. – № IV (28). – С. 12-15.
11. Петров, М. Р. Определение диаграммы растяжения трубчатого стержня из гиперэластичного материала / М. Р. Петров, А. Н. Петрова, С. Ф. Хакимов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № II-1 (34). – С. 29-34.